MA2 – „písemná" přednáška 6.4.2020

I. Nejprve si ještě trochu rozšíříme „matematický slovník" o několik pojmů, které se týkají vlastností bodů a množin v R^n. Tyto pojmy nám pak umožní lépe (stručněji a výstižněji) vyjádřit a popsat vlastnosti funkcí $f: M \subset R^n \to R^m$, jejichž vyšetřováním se teď zabýváme.

Připomeneme si, co jsme již definovali: $(M \subset R^n)$

1) hromadný (limitní) bod množiny M:

bod X_0 je hromadný bod množiny M, když platí:
$\forall P(X_0): P(X_0) \cap M \neq \emptyset$ – tj. k bodu X_0 se můžeme z M přiblížit libovolně blízko a je tedy možné uvažovat limitu
$\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f(X)$ (limita fce f v bodě X_0 vzhledem k množině M)
(a spojitost v X_0, když $X_0 \in M$ vzhledem k M)
Také – existuje posloupnost bodů $\{X_n\}, X_n \in M$ a $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X$

A množinu všech hromadných bodů množiny M jsme značili M'

2) vnitřní bod množiny M:

bod $X_0 \in M$ je vnitřní bod M, když existuje okolí $U(X_0)$ bodu X_0 takové, že $U(X_0) \subset M$. –
(i) vnitřní body jsou také hromadné body
(ii) vyšetřovali jsme spojitost v X_0 (bez „vzhledem k M")
(iii) parciální derivace a diferencovatelnost funkce byly definovány „jen" ve vnitřních bodech

a teď „navíc":

M^0 budeme značit množinu všech vnitřních bodů množiny M,

M^0 – vnitřek množiny M

3) Mezi body, které nejsou vnitřní body množiny M, jsou ještě důležité t.zv. hraniční body množiny M:

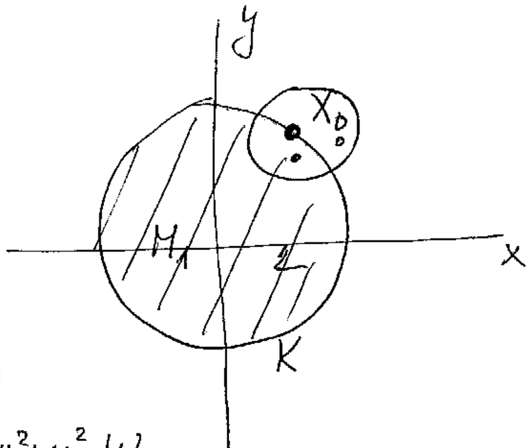
$(\emptyset \neq) M \subset R^n$ – bod $A \in R^n$ je hraniční bod M, když platí:

$$\forall \mathcal{U}(A): \ \mathcal{U}(A) \cap M \neq \emptyset \ \text{ i } \ \mathcal{U}(A) \cap (R^n \setminus M) \neq \emptyset$$

tj. v každém okolí bodu A leží bod z M i z doplňku k M

Množina všech hraničních bodů M se nazývá hranice M a značí ∂M.

Příklad:



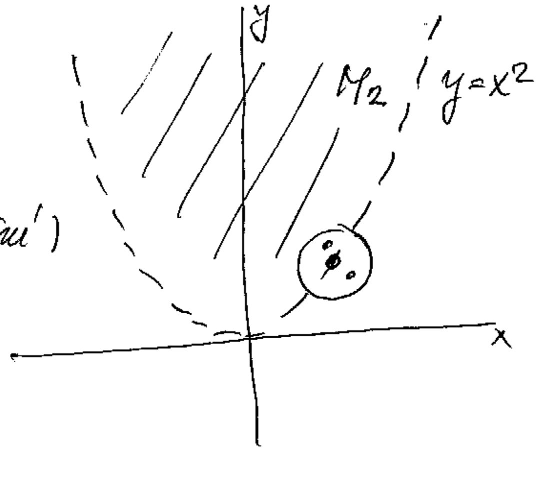
(i) $M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4\}$

(kruh o středu v $[0,0]$ a poloměru $r=2$, včetně kružnice o rovnici $x^2+y^2=4$)

lib. bod kružnice $K = \{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$ je hraniční bod M_1 (a také hromadný bod),

tj. $\partial M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$

a $M^0 = \{[x,y];\ x^2+y^2<4\}$



(ii) $M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y-x^2>0\}$

$M_2 = M_2^0$ (každý bod M^0 je vnitřní)

$\partial M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y-x^2=0\}$

(tj. $y=x^2$)

<u>Další důležité „druhy" množin v R^n</u>

4) <u>$M \subset R^n$ je otevřená množina</u>, když $M = M^0$,
tj. každý bod množiny M je bod vnitřní.

Příklad: (i) $M_2 = M_2^0$ (z minulého příkladu), tj.
<u>M_2 je množina otevřená</u>

(ii) $M_3 = R^2 \setminus \{[0,0]\}$ je též množina otevřená

5) <u>$M \subset R^n$ je množina uzavřená</u>, když $M' \subset M$,
tj. všechny hromadné body množiny M jsou v M (tedy limity všech posloupností bodů z M zůstávají v M – M je „uzavřená" vzhledem k „limitění")

<u>Ekvivalentně</u>: (i) <u>$M \subset R^n$ je uzavřená $\Leftrightarrow \partial M \subset M$</u>

(je-li $X \in \partial M$, pak buď $X \in M$ a je izolovaný bod M (tj. existuje $P(X)$: $P(X) \cap M \neq \emptyset$) nebo je hromadným bodem M)

(ii) <u>$M \subset R^n$ je uzavřená $\Leftrightarrow$ $R^n \setminus M$ je množina otevřená</u>

<u>Označení</u>: <u>$M \cup \partial M = \bar{M}$ – uzávěr množiny M</u>

také <u>$\bar{M} = M \cup M'$</u>

Z příkladů: M_1 je množina uzavřená, M_2 je množina otevřená

a $\bar{M}_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y - x^2 \geqq 0\}$

$\bar{M}_3 = R^2$ ($[0,0]$ je hromadný bod M_3)

! analogie z R : (a,b) – množina otevřená – „otevřený" interval
$\langle a,b\rangle$ – množina uzavřená – „uzavřený" interval

6) Omezená množina $M\subset R^n$:

$M\subset R^n$ je množina omezená, existuje-li $c>0$ takové, že
$M\subset \mathcal{U}(0;c)$ (tj. $\rho_n(X,0)<c$ pro $\forall X\in M$)

7) Kompaktní množina $M\subset R^n$ – (velmi „důležitý" typ množiny):
$M\subset R^n$ je kompaktní, když M je omezená a uzavřená.

8) Souvislá množina $M\subset R^n$
a) $M\subset R^n$ je souvislá, když lib. dva body $A,B\in M$ lze „spojit" křivkou v M (zatím si představte intuitivně v $R^2(R^3)$) tj. existuje křivka, jejíž počáteční bod je A, koncový bod B, a křivka „celá" leží v M)

b) Je-li M množina souvislá a otevřená – M – oblast v R^n

Naše příklady množin:

$M_1=\{[x,y];\ x^2+y^2\leqq 4\}$ – omezená, uzavřená množina, tedy kompaktní

$M_1^0=\{[x,y];\ x^2+y^2<4\}$ – otevřená a souvislá – oblast

$M_2=\{[x,y];\ y-x^2>0\}$ – otevřená, souvislá – oblast

$M_4=\{[x,y];\ x^2+y^2\geqq 4\}$ – uzavřená, ale není omezená

$\partial M_4=\partial M_3=\{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$

a pozor! R^n a $\emptyset$ jsou otevřené i uzavřené (jediné mají obě tyto vlastnosti)

A ještě důležité vlastnosti funkcí spojitých na množině:

Definice: $f: D_f \subset R^n \to R$

a) funkce f je omezená na $M \subset D_f$, když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $X \in M$ je $|f(X)| \leq c$;
f je na M omezená shora (resp. zdola), existuje-li $c \in R$ (resp. $d \in R$) tak, že pro všechna $X \in M$ je $f(X) \leqq c$ (resp. $f(X) \geqq d$).

b) f je spojitá na $M \subset D_f$, když je spojitá v každém bodě $X \in M$ vzhledem k M (tj. ve vnitřních bodech je f spojitá, v hraničních bodech, pokud jsou to body M, spojitá „z M")

A důležité vlastnosti spojitých funkcí:

Věta: Je-li $M \subset R^n$ kompaktní (tj. omezená a uzavřená) a f je spojitá na M, pak f je na M omezená a nabývá na M globálního maxima i minima.

Definice globálních extrémů funkce na M (je „stejná" jako u funkce proměnné jedné): $f: M \subset R^n \to R$;
f má v bodě $X_M \in M$ globální maximum na M, když platí:

$$\forall X \in M \ (M \subset R^n) \text{ je } f(X) \leqq f(X_M);$$

f má v bodě $X_m \in M$ globální minimum na M, když platí:

$$\forall X \in M \text{ je } f(X) \geqq f(X_m).$$

Věta (Darbouxova, o nabývání mezihodnot)

Je-li f spojitá v oblasti $M \subset R^n$, pak pro libovolné body $a, b \in M$ takové, že $f(a) < f(b)$ (BÚNO) a pro lib. c, $f(a) < c < f(b)$, existuje bod $x_c \in M$ tak, že $f(x_c) = c$.

Poznámka: Už jsme viděli, že tato vlastnost se velmi hodila při vyšetřování znaménka spojité funkce, např. znaménka derivace při vyšetřování průběhu funkce, nebo při „odstraňování" absolutní hodnoty v $|y(x)-c|$ při řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.

II. „Implicitní funkce" – zkrácený výraz pro Funkce definované implicitně"

„Úvod:" Dosud pro nás funkce f – tj. zobrazení $f: Df \subset R \to R$, pak obecněji $f: Df \subset R^n \to R^m$ takové, že každému $x \in Df$ je přiřazeno jediné $y \in R^m (R)$ – bylo dáno „předpisem", např.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{nebo} \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

nebo vlastnostmi – např. $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, nebo pomocí nekonečné řady:

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Funkce, zadané předpisem $y = f(x)$, $x \in \mathcal{D}f$, se nazývají
funkce zadané explicitně.

Ale funkce jakožto vztah mezi proměnnou x a hodnotou
fce y nemusí být zadána i jinak než vzorcem –
– připomeňme si diferenciální rovnice 1. řádu se separovatel-
nými proměnnými, které jsme řešili separací:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \quad , \text{ nechť } g(y) \neq 0 \text{ v } (c,d)$$

tak $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$ g je spojitá fce v (c,d), f je spojitá fce v (a,b)

a $$G(y) = F(x) + c$$ – a je-li dána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$,

a $$G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0), \text{ je } c = G(y_0) - F(x_0)$$

tj. řešení $y(x)$ je dáno rovnicí

$$G(y(x)) - F(x) - (G(y_0 - F(x_0)) = 0 \quad , \quad x \in (a,b)$$

Nejjednodušší případ je takové „situace", je zadání funkce
jedné proměnné tímto způsobem, tj. rovnice

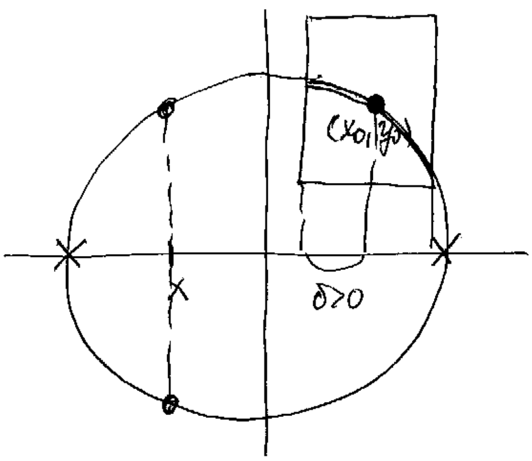
$$(*) \qquad F(x,y) = 0$$

Budeme uvažovat rovnici (1) nelineární (z lineární
rovnice $ax + by + c = 0$, pokud $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$,
lze vždy jednu proměnnou určit jako explicitní funkci
proměnné druhé.

Pokud má rovnice (*) $F(x,y)=0$ vůbec nějaké řešení (třeba rovnice $x^2+y^2+1=0$ řešení v R^2 nemá), pak nelze z jedné rovnice určit jednoznačně obě neznámé x, y, ale jednu můžeme volit – parametr – a pak otázka, zda řešením rovnice (*) je funkce je vlastně otázka, zda ke zvolenému x (zde volíme x) existuje jediné y $(=f(x))$ takové, že $F(x,f(x))=0$

Vezměme příklad: $F(x,y)=x^2+y^2-r^2$, tedy v příkladu je otázka, zda rovnicí $x^2+y^2-r^2=0$ je definována funkce.

Rovnice $F(x,y)=0$ je zde rovnice kružnice, je-li $r>0$:-



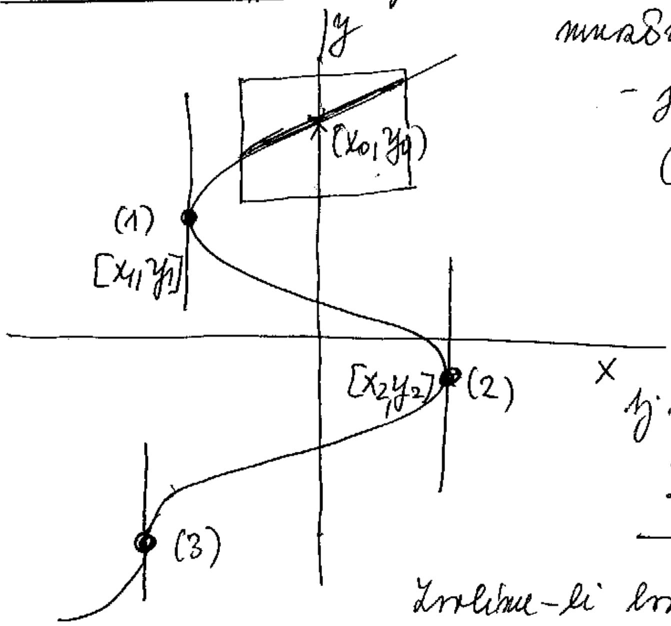
kružnice není grafem žádné funkce, pokud $x\in(-r,r)$, neboť rovnice $x^2+y^2=r^2$ řešení dvě – $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ ale vezmeme-li „okolí" „kolem" bodu (x_0,y_0) kružnice (viz obrázek), pak část kružnice, která je v tom okolí, už grafem funkce je

$$y(x)=\sqrt{r^2-x^2}, \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

A budeme-li chtít popsat kružnici pomocí grafu fce $y=f(x)$ kolem "bodu" (x_0,y_0) kružnice (v okolí – tj. „po kouscích") – „půjde to pro všechny body kružnice kromě průsečíků s osou x – tj. kromě bodů $[-r,0]$ a $[r,0]$. V jejich libovolně malém okolí má rovnice vždy dvě řešení pro zvolené x.

Jak tohle charakterizovat, jakou vlastnost funkce $F(x,y)$ v rovnici $F(x,y)=0$?

<u>Vezměme si „obecnější“ obrázek</u>



množina bodů „na obrázku“ – křivka – je popsána rovnicí $F(x,y)=0$ (připomeňte si „vrstevnice“ grafu funkce $z = F(x,y)$ – zde je to vrstevnice pro $z=0$)

tj. naše „křivka“ je množina

$$\{(x,y);\ F(x,y)=0\}$$

Zvolíme-li bod $[x_0,y_0]$ (viz obrázek), zase bude existovat „okénko“ o středu (x_0,y_0) takové, že v okénku bude „část“ té naší křivky grafem funkce proměnné x, ale nepůjde udělat žádné okénko kolem bodů (1) a (2) obrázku – opět, v lib. malém okénku pro zvolené x (blízko x_1, resp. x_2) budou existovat vždy dvě řešení rovnice $F(x,y)=0$.

A je „vidět“, že to jsou body na křivce, kde tečna je rovnoběžná s osou y v bodě (1) i (2). Takové body tedy „nebezpečné“, nicméně může se stát, že i (případ bod (3)) v okolí takového bodu křivka grafem fce $y=f(x)$ bude.

A jak takové body s tečnou rovnoběžnou s osou y charakterizovat pomocí rovnice, tj. funkce $F(x,y)$?

Předpokládejme, že $F(x,y) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$ je oblast; pak, je-li $F(x_0,y_0)=0$, je bod $[x_0,y_0,0]$ bodem grafu fce $F(x,y)$ a umíme zde najít rovnici tečné roviny ke grafu F v tomto bodě – $F(x,y)$ je diferencovatelná funkce (má spojité derivace) a tedy ke grafu existuje tečná rovina v bodech $[x,y,f(x,y)]$, $(x,y) \in \Omega$; rovnice tečné roviny v $[x_0,y_0,0]$ je

$$\tau: \quad z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad (F(x_0,y_0)=0)$$

a pro $z=0$ dostaneme rovnici přímky (stopy roviny τ)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

tj. tečny ke křivce $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0). Má-li být tato tečna rovnoběžná s osou y, musí být $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$; Tedy, řečeno řečí „obrázku" (přesná formulace bude za chvilku), aby křivka byla v okolí „kolem" bodu (x_0,y_0) určena grafem funkce $y=f(x)$ takové, že $f(x_0)=y_0$, asi stačí, aby $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. (tato není ale podmínka nutná – viz bod (3) na našem obrázku).

Funkci, která je definována rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0), tj. $y=f(x)$, $f(x_0)=y_0$, a $F(x,f(x))=0$

se říká funkce definovaná implicitně (nebo funkce zadaná implicitně) – krátce „implicitní funkce".

<u>A teď přesná definice a věta o existenci funkce, definované implicitně:</u>

<u>Definice:</u> Nechť

(1) $F(x,y)$ je funkce definovaná v otevřené množině $G \subset R^2$

(2) existuje bod $(x_0,y_0) \in G$ tak, že $F(x_0,y_0)=0$.

Říkáme, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$, jestliže existují $\varepsilon>0, \delta>0$ tak, že pro každé $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $y=f(x)$ jediné řešení rovnice $F(x,y)=0$ takové, že $f(x) \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$.

<u>Věta („o implicitní funkci"):</u> Nechť

1) $F(x,y) \in C^{(k)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$ je otevřená množina, $k \in N$;

2) $F(x_0,y_0)=0$, $(x_0,y_0) \in G$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Potom rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$, $f \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$, tedy

1) $F(x,f(x))=0$ v $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$

2) $f(x_0)=y_0$

Poznámka 1. „Musí" platit bod (2) navíc, tj.: $f(x_0)=y_0$ díky tomu, že ex. $\delta>0$ tak, že v $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $y=f(x)$ jediné řešení $F(x,y)=0$ pro $y\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ – – ale jedno řešení je v předpokladech – bod (x_0,y_0), tedy,
$f(x_0)=y_0$!

Poznámka 2. Pokud $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ ale $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, tak můžeme „vyměnit" role $x \leftrightarrow y$ a pak bude rovnicí $F(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitní fce $x=g(y)$.

U kružnice: $F(x,y)=x^2+y^2-r^2,\ r>0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y,\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x$$

v bodě $[r,0]$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(r,0)=0$, ale $\frac{\partial F}{\partial x}(r,0)=2r\neq 0$!

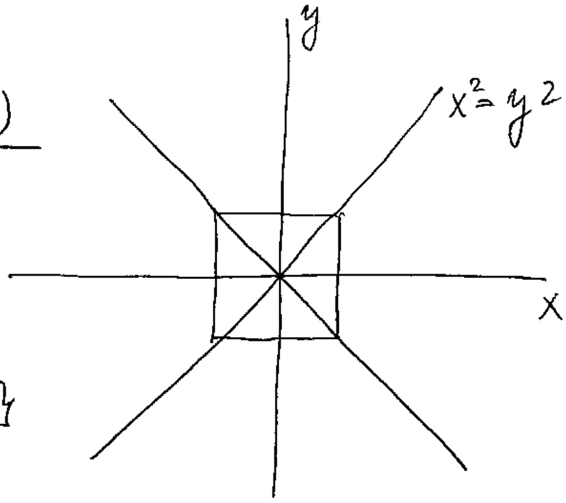
tedy (a představte si na „obrázku") kružnici lze v okolí bodu $[r,0]$ (a stejně v okolí $[-r,0]$) vyjádřit jako fci proměnné „y":

$x=\sqrt{r^2-y^2}$ v okolí $[r,0]$ a

$x=-\sqrt{r^2-y^2}$ v okolí $[-r,0]$.

Ale jiný příklad:

1) $F(x,y) = x^2 - y^2$, $(x_0,y_0) = (0,0)$



$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

v žádném okolí bodu $(0,0)$ nelze množinu bodů $\{[x,y];\ F(x,y)=0\}$ „popsat" grafem funkce.

2) $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 + 2c^2(y^2-x^2)$, $c>0$; $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot 2x + 2c^2(-2x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2(x^2+y^2)2y + 2c^2\cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$$

Jak „vypadá" množina $\{(x,y);\ F(x,y)=0\}$

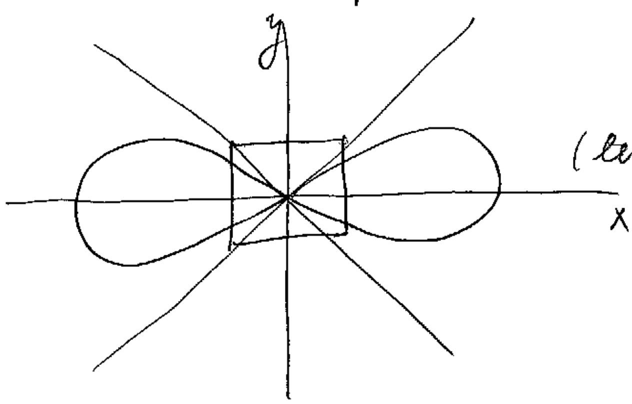
Vyjádříme $F(x,y)=0$ v polárních souřadnicích

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, \qquad x^2+y^2=r^2 \quad (r>0,\ \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle)$$

Pak dostaneme: $r^4 + 2c^2r^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0$, $r \neq 0$

pak $r^2 - 2c^2\cos 2\varphi = 0$

$$0 < 2c^2\cos 2\varphi = r^2 \iff \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$



(lemniskata)

a maximální r je pro $\cos 2\varphi = 1$, tj. $2\varphi = 0 \vee 2\varphi = 2\pi$

tj. $\varphi = 0 \vee \varphi = \pi$

Ve větě o implicitní funkci se říká, že fce $f(x) \in C^k(\mathcal{U}(x_0))$, tedy, implicitně definovaná funkce má tolik derivací, kolik má derivací (spojitých) funkce $F(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0) – jak ji spočítat?

Ještě dříve – zpravidla (dále aplikacích věty o implicitní funkci) se užívá místo $y=f(x)$ pro implicitní funkci značení $y = y(x)$ (např. jako řešení rovnice diferenciální).

Ukažme: Je-li $y=y(x)$ funkce, definovaná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0), pak platí

$$(*) \quad F(x,y(x)) = 0 \quad \text{v okolí } \mathcal{U}(x_0) \text{ a } y(x_0)=y_0 .$$

Jsou zde splněny předpoklady věty o derivaci složené funkce (řetízkového pravidla) a dostaneme derivací $(*)$:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,y(x))\right) = 0 \quad , \text{ tedy}$$

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$$

a odtud:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} \quad \text{v } \mathcal{U}(x_0),$$

neboť, když $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ a $y=y(x)$ jsou spojité funkce, pak i $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$

a tedy spec. pro bod $[x_0,y_0]$: $\quad y'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$

Má-li F spojité derivace druhého řádu v $\mathcal{U}(x_0, y_0)$, pak má spojitou druhou derivaci i funkce $y(x)$ v $\mathcal{U}(x_0)$ a lze tak dále derivovat vztah (**) – a dostaneme:

$$(***)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) + y''(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) +$$

$$+\ y'(x)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot y'(x)\right) = 0\,,$$

a odtud opět lze určit $y''(x)$ v $\mathcal{U}(x_0)$, neboť koeficient u $y''(x_0)$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$ (opět) – – když $F(x, y) \in C^{(3)}(\mathcal{U}(x_0, y_0))$, lze opět derivovat (***) a když promyslíte ", jak bude vypadat derivace – tak opět " u y''' bude $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$.

Derivace lze „spočítat" v bodě x_0 – protože zde víme, že $y(x_0) = y_0$, tj. můžeme vyjádřit hodnoty derivací (dle návodu) $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ atd., tedy, tyto derivace nám umožní přibližné řešení dané, obecné nelineární rovnice, ve tvaru Taylorova polynomu o středu v bodě x_0.

<u>A příklad – na další stránce:</u>

(1) $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$, $(x_0, y_0) = (1,2)$

tj. $F(x,y) \equiv x^3+y^3-3xy-3$

a platí (ověřujeme předpoklady věty o implicitní funkci)

1) $F(x,y) \in C^\infty(R^2)$

2) $F(1,2) = 0$ $\quad (F(1,2) = 1+8-6-3)$ $\Rightarrow$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 3y^2-3x \Big|_{(1,2)} = 9 \neq 0$

$\Rightarrow$ věta o impl. fci — v okolí bodu (1,2) je rovnicí (1) definována implicitně funkce $y = y(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(1))$, $y(1)=2$

a platí (derivujeme $F(x,y(x))=0$)

$$x^3 + y^3(x) - 3xy(x)) - 3 = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$3x^2 + 3y^2(x).y'(x) - 3y(x) - 3xy'(x) = 0$$

tj. $$y'(x)\,(y^2(x) - x) = -x^2 + y(x) \quad (*)$$

$$y'(x) = -\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x}$$

$$\underline{\text{a } y'(1) = +\frac{1}{3}}$$

nebo užití vzorce pro $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$$:

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$

$$(**) \quad y'(x) = -\frac{x^3 - y(x)}{y^2(x) - x}, \quad x \in \mathcal{U}(1)$$

A chceme-li ještě určit $y''(1)$ (třeba pro Taylorův polynom), pak je lepší derivovat rovnici (*) než vztah (**):

$$\frac{d}{dx}(*):\quad y''(x)\left(y^2(x)-x\right)+y'(x)\left(2y(x).y'(x)-1\right)=-2x+y'(x)$$

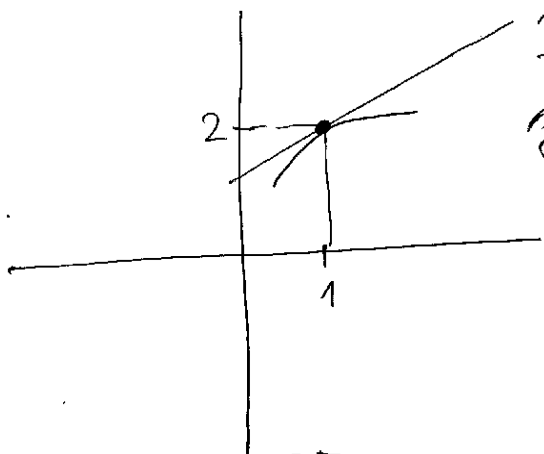
a pro $x=1$: $\quad y''(1)\cdot 3+\frac{1}{3}\left(2.2.\frac{1}{3}-1\right)=-2+\frac{1}{3}$

a odtud $\quad y''(1)=-\frac{16}{27}$,

a máme "přibližné" řešení (Taylorův polynom 2. stupně)

$$\underline{y(x)\cong 2+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{8}{27}(x-1)^2 \text{ v } \mathcal{U}(1)}$$

a představa grafu $y(x)$:



tečna – směrnice $k=\frac{1}{3}$

$y''(1)<0 \Rightarrow y(x)\cap$ v okolí bodu $x_0=1$

<u>A jedna aplikace derivace</u> $y'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$:

rovnice tečny ke grafu funkce $y=y(x)$ v bodě (x_0,y_0):

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0),\ \text{tj.}\quad y=y_0-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0)\quad (***),$$

tedy: $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$, tj.

$$\underline{\nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0\ \equiv\ dF(x_0,y_0,\,x-x_0,\,y-y_0)=0}$$

A odtud je opět „vidět" že $\nabla F(x_0,y_0) \perp (x-x_0, y-y_0)$

tj. $\nabla F(x_0,y_0)$ je kolmý k tečné „vrstevnice" $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) ((x,y), (x_0,y_0) jsou body tečny ve vyjádření (***))

A příklad – jak snadno „spočítáme" rovnici tečny ke kružnici $\underline{x^2+y^2=r^2,\ r>0}$:

zde : $F(x,y) = x^2+y^2-r^2$, nechť (x_0,y_0) je bod kružnice, tj.

$$F(x_0,y_0)=0$$

pak rovnice tečny je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$,

tj. zde $2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0)=0$,

tj. po úpravě $x_0x + y_0y = x_0^2+y_0^2$, tj.

$$\underline{\underline{x_0x + y_0y = r^2}}$$

A příští přednáška bude zobecněním – vyšetříme implicitně definované funkce více proměnných.